

# IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS

## 1. ESTANDARES

Modelar situaciones de variaciones de variación periódicas con funciones trigonométricas.

## 2. LOGROS

2.1. Deducir las identidades trigonométricas fundamentales

2.2. Demostrar identidades trigonométricas

3. ¿Para que sirven las identidades trigonométricas?.

Las identidades trigonométricas sirven para desarrollar el pensamiento deductivo de los estudiantes. En efecto, en proceso de demostración se hace necesario de partir de las identidades fundamentales y mediante una serie de procedimientos algebraicos como sustituciones, operaciones con fracciones algebraicas, multiplicaciones, factorizaciones y simplificaciones, se debe llegar a una conclusión final.

## ❖ CONCEPTOS PREVIOS

Los estudiantes deben de manejar:

- Explicar y comprender el concepto de igualdad
- Conocer las identidades básicas
- Procedimientos algebraicos como operaciones básicas de fracciones algebraicas productos notables, factorización

## ❖ DEFINICION DE IDENTIDAD TRIGONOMETRICAS

Es una relación que contiene funciones trigonométricas y que es válida para todos los valores del ángulo en los que están definidas estas funciones.

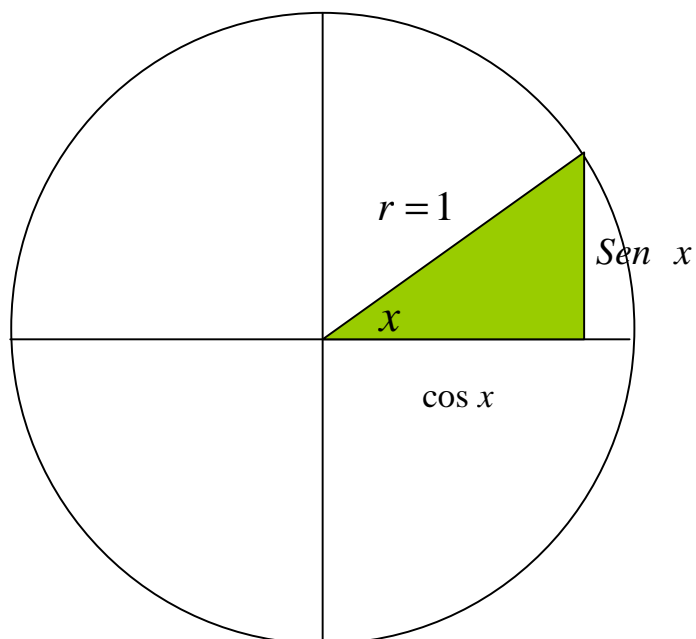
Ejemplos:

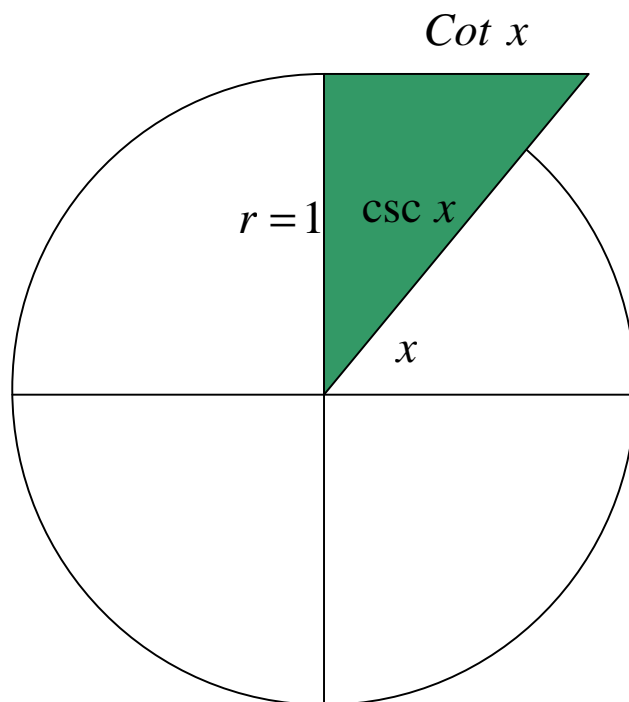
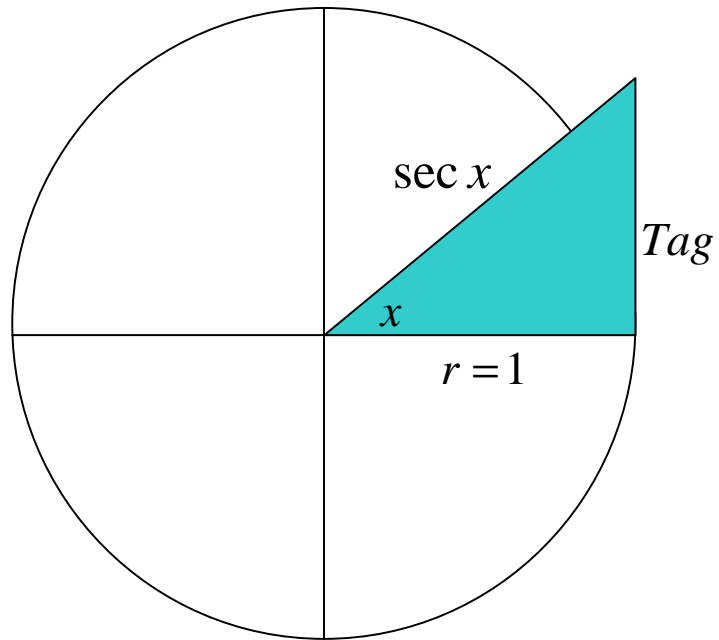
1.  $\sec x \times \cos x = 1$
2.  $\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$
3.  $\cos x \times \tan x \times \text{csc } x = 1$

## ❖ IDENTIDADES TRIGONOMETRICA FUNDAMENTALES

### ➤ IDENTIDADES POTAGORICAS

Para deducir estas identidades, se debe tener en cuenta el círculo trigonométrico cuyo radio es igual a la unidad; las líneas trigonométricas y el Teorema de Pitágoras ( $c^2 = a^2 + b^2$ )





Por Pitágoras en cada un de las figuras podemos obtener:

$$1. \operatorname{Sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x = 1$$

$$2. \operatorname{Sec}^2 x = 1 + \operatorname{tag}^2 x$$

$$3. \operatorname{Csc}^2 x = 1 + \operatorname{cot}^2 x$$

#### ➤ IDENTIDADES DE COCIENTE

$$4. \operatorname{Tag} x = \frac{\operatorname{Sen} x}{\operatorname{Cos} x}$$

$$5. \operatorname{Cot} x = \frac{\operatorname{Sen} x}{\operatorname{Cos} x}$$

#### IDENTIDADES RECIPROCAS

$$6. \operatorname{Cot} x = \frac{1}{\operatorname{Tag} x}$$

$$7. \operatorname{Sec} x = \frac{1}{\operatorname{Cos} x}$$

$$8. \operatorname{Csc} x = \frac{1}{\operatorname{Sen} x}$$

## FUNCIONES PARES E IMPARES

$$9. \text{Sen}(-x) = -\text{Sen } x$$

$$10. \text{Cos}(-x) = \text{Cos } x$$

## 2. PASOS PARA DEMOSTRAR IDENTIDADES

1. Se debe partir del lado más complejo y transformarse en el lado más sencillo.
2. Sustituir las funciones: tangente, cotangente, secante y cosecante en función de seno y coseno.
3. Realizar las operaciones algebraicas.
4. Tienen como objetivo, el otro lado de la identidad, para hacer las sustituciones necesarias para llegar a este lado.

3. Ejemplos:

Verificar las siguientes identidades

$$1. \text{Cot } x \times \text{Sec } x \times \text{Sen } x = 1$$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{Cot } x \times \text{Sec } x \times \text{Sen } x &= \left( \frac{\cos x}{\text{sen } x} \right) \left( \frac{1}{\text{csc } x} \right) (\text{sen } x) \\ &= \text{Sen } x \end{aligned}$$

2.  $\text{Csc } x - \text{Sen } x = \text{Cot } x \times \text{Csc } x$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{Csc } x - \text{Sen } x &= \frac{1}{\text{Sen } x} - \text{Sen } x \\ &= \frac{1 - \text{Sen}^2 x}{\text{Sen } x} \\ &= \frac{\text{Cos}^2 x}{\text{Sen } x} \\ &= \left( \frac{\text{Csc } x}{\text{Sen } x} \right) (\text{Cos } x) \\ &= \text{Cot } x \times \text{Cos } x \end{aligned}$$

$$3. \tan x \cdot \text{sen} x + \cos x = \sec x$$

Solución

$$\begin{aligned} \tan x \cdot \text{sen} x + \cos x &= \left( \frac{\text{sen} x}{\cos x} \right) (\text{sen} x) + \cos x \\ &= \frac{\text{Sen}^2}{\cos x} + \cos x \\ &= \frac{\text{Sen}^2 x + \text{Cos}^2 x}{\cos x} \\ &= \frac{1}{\cos x} \\ &= \sec x \end{aligned}$$

$$4. \tan(-x) = -\tan x$$

Solución

$$\begin{aligned} \tan(-x) &= \frac{\text{sen}(-x)}{\cos(-x)} \\ &= \frac{-\text{sen} x}{\cos x} \\ &= -\text{tag} x \end{aligned}$$

$$5. \frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x} + \frac{\cos x}{1 + \cos x} = 2 \sec x$$

Solución

$$\begin{aligned} \frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x} + \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x} &= \frac{\cos x(1 + \operatorname{sen} x) + \cos x(1 - \operatorname{sen} x)}{(1 - \operatorname{sen} x)(1 + \operatorname{sen} x)} \\ &= \frac{\cos x + \operatorname{sen} x \cos x + \cos x - \operatorname{sen} x \cos x}{1 - \operatorname{Sen}^2 x} \\ &= \frac{2 \cos x}{\operatorname{Cos}^2 x} \\ &= 2 \frac{1}{\cos x} \\ &= 2 \sec x \end{aligned}$$

$$6. \operatorname{Sen}^4 x - \operatorname{Cos}^4 x = \operatorname{Sen}^2 x - \operatorname{Cos}^2 x$$

Solución

$$\begin{aligned} \operatorname{Sen}^4 x - \operatorname{Cos}^4 x &= (\operatorname{Sen}^2 x + \operatorname{Cos}^2 x)(\operatorname{Sen}^2 x - \operatorname{Cos}^2 x) \\ &= \operatorname{Sen}^2 x - \operatorname{Cos}^2 x \end{aligned}$$



$$7. \frac{\sec^2 x - \tan^2 x}{\csc x} = \sec^2 x - \cos^2 x$$

Solución

$$\begin{aligned} \frac{\sec^2 x - \tan^2 x}{\csc x} &= \frac{1 - \frac{\sec^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\sec x}} \\ &= \frac{1 - \sec^2 x}{\frac{1}{\sec x}} \\ &= \frac{\cos^2 x}{\frac{1}{\sec x}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\sec x}} \\ &= \sec x \end{aligned}$$

$$8. (\text{Sen } x + \text{Cos } x)^2 = 1 + 2\text{Sen } x \text{ Cos } x$$

Solución

$$(\text{Sen } x + \text{Cos } x)^2 = \text{Sen}^2 x + 2\text{Sen } x \text{ Cos } x + \text{Cos}^2 x$$

$$= (\text{Sen}^2 x + \text{Cos}^2 x) + 2 \text{Sen } x \text{ Cos } x$$

$$= 1 + 2\text{Sen } x \text{ Cos } x$$

$$9. \text{Tan } x + 2\text{Cos } x \text{ Csc } x = \text{Sec } x \text{ Cos } x + \text{Cot } x$$

Solución

$$\text{Tan } x + 2\text{Cos } x \text{ Csc } x = \frac{\text{Sec } x}{\text{Cos } x} + 2 \text{Cos } x \left( \frac{1}{\text{Sen } x} \right)$$

$$= \frac{\text{Sen } x}{\text{Cos } x} + 2 \left( \frac{\text{Cos } x}{\text{Sen } x} \right)$$

$$= \frac{\text{Sen}^2 x + 2\text{Cos}^2 x}{\text{Sen } x \text{ Cos } x}$$

$$= \frac{(\text{Sen}^2 x + \text{Cos}^2 x) + \text{Cos}^2 x}{\text{Sen } x \text{ Cos } x}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1 + \text{Cos}^2 x}{\text{Sen } x \text{ Cos } x} \\
&= \frac{1}{\text{Sen } x \text{ Cos } x} + \frac{\text{Cos}^2 x}{\text{Sen } x \text{ Cos } x} \\
&= \left( \frac{1}{\text{Sen } x \text{ Cos } x} \right) \left( \frac{1}{\text{Cos } x} \right) + \frac{\text{Cos } x}{\text{Sen } x} \\
&= \text{Cos } x \text{ Sec } x + \text{Cot } x
\end{aligned}$$

10.  $\text{Tan } x + \frac{\text{Cos } x}{1 + \text{Sen } x} = \text{Sec } x$

Solución

$$\begin{aligned}
\text{Tan } x + \frac{\text{Cos } x}{1 + \text{Sen } x} &= \frac{\text{Sen } x}{\text{Cos } x} + \frac{\text{Cos } x}{1 + \text{Sen } x} \\
&= \frac{\text{Sen } x + (1 + \text{Sen } x) + \text{Cos } x \cdot \text{Cos } x}{\text{Cos } x (1 + \text{Sen } x)} \\
&= \frac{\text{sen } x + (\text{sen}^2 x + \text{Cos}^2 x)}{\text{Cos } x (1 + \text{Sen } x)} \\
&= \frac{(1 + \text{sen } x)}{\text{Cos } x (1 + \text{Sen } x)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\cos x}$$
$$= \sec x$$

## TALLER

Demostrar las siguientes identidades

1.  $\cos x \cdot \sec x = 1$
2.  $\sin x \cdot \csc x = 1$
3.  $(1 + \cos x)(1 - \cos x) = \sin^2 x$
4.  $\frac{\sin x}{1 - \cos x} = \csc x$
5.  $\frac{\cos x}{\sin x} + \sin x = \csc x$
6.  $\tan^2 x \cos^2 x = 1 - \cos^2 x$
7.  $\frac{\csc x}{\cot x + \tan x} = \cos x$

$$8. \quad \text{Sec } x + \text{Tan } x = \frac{\text{Cos } x}{1 - \text{Sen } x}$$

$$9. \quad \frac{1 + \text{Sen } x}{\text{Sen } x} = 1 + \text{Cos } x$$

$$10. \quad \frac{\text{Sen}^2 x - \text{Tan}^2 x}{\text{Cosc } x} = \text{Sen } x$$

$$11. \quad \frac{\text{Sen } x}{\text{Cos } x + 1} + \frac{\text{Cos } x}{\text{Sec } x} = 1$$

$$12. \quad \frac{\text{Cos } x}{\text{Cosc } x} + \frac{\text{Cos } x}{\text{Sec } x - 1} = 2 \text{Tan } x$$

$$13. \quad \frac{1 - \text{Cos } x}{1 + \text{Cos } x} = \frac{\text{Sec } x - 1}{\text{Sec } x + 1}$$

$$14. \quad \frac{1}{\text{Cosc}^2 x} + \frac{1}{\text{Sec}^2 x} = 1$$

$$15. \quad \text{Cot } x + \frac{\text{Sen } x}{1 + \text{Cos } x} = \text{Cos } x$$

SOLUCION

1.  $\text{Cos } x \cdot \text{Sec } x = 1$

$$D//. \text{Cos } x \cdot \text{Sec } x = (\text{Cos } x) \left( \frac{1}{\text{Cos } x} \right) = 1$$

2.  $\text{Sen } x \text{ Cos } x = 1$

$$D// \text{Sen } x \text{ Cos } x = \text{Sen } x \left( \frac{1}{\text{Sen } x} \right) = 1$$

3.  $(1 + \text{Cos } x)(1 - \text{Cos } x) = \text{Sen}^2 x$

$$D//. (1 + \text{Cos } x)(1 - \text{Cos } x) = 1 - \text{Cos}^2 x = \text{Sen}^2 x$$

4.  $\frac{\text{Sen } x}{1 - \text{Cos}^2 x} = \text{Cosc } x$

$$D//. \frac{\text{Sen } x}{1 - \text{Cos}^2 x} = \frac{\text{Sen } x}{\text{Sen}^2 x} = \frac{1}{\text{Sen } x} = \text{Csc } x$$

5.  $\frac{\text{Cos}^2 x}{\text{Sen } x} + \text{Sen } x = \text{Csc } x$

$$D // \frac{\text{Cos}^2 x}{\text{Sen} x} + \text{Sen} x = \frac{\text{Cos}^2 x + \text{Sen}^2 x}{\text{Sen} x} = \frac{1}{\text{Sen} x} = \text{Csc} x$$

$$6. \text{Tan}^2 x \text{Cos}^2 x = 1 - \text{Cos}^2 x$$

$$D // \text{Tan}^2 x \text{Cos}^2 x = \left( \frac{\text{Sen}^2 x}{\text{Cos}^2 x} \right) (\text{Cos}^2 x) = \text{Sen}^2 x = 1 - \text{Cos}^2 x$$

$$7. \frac{\text{Cos} x}{\text{Cot} x + \text{tan} x} = \text{Cos} x$$

$$D // \frac{\text{Csc} x}{\text{Cot} x + \text{Tan} x} = \frac{\frac{1}{\text{Sen} x}}{\frac{\text{Cos} x}{\text{Sen} x} + \frac{\text{Sen} x}{\text{Cos} x}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\text{Sen} x}}{\frac{\text{Sen}^2 x + \text{Cos}^2 x}{\text{Sen} x \text{Cos} x}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{1}{\text{Sen } x}}{\frac{1}{\text{Sen } x \text{ Cos } x}} \\
&= \frac{\text{Sen } x \text{ Cos } x}{\text{Sen } x} \\
&= \text{Cos } x
\end{aligned}$$

$$8. \text{ Sec } x + \text{Tan } x = \frac{\text{Cos } x}{1 - \text{Sen } x}$$

$$\begin{aligned}
D//. \text{ Sec } x + \text{Tan } x &= \frac{1}{\text{Cos } x} + \frac{\text{Sen } x}{\text{Cos } x} \\
&= \frac{1 + \text{Sen } x}{\text{Cos } x} \\
&= \frac{(1 + \text{Sen } x)(1 - \text{Sen } x)}{\text{Cos } x(1 - \text{Sen } x)} \\
&= \frac{1 - \text{Sen}^2 x}{\text{Cos } x(1 - \text{Sen } x)} \\
&= \frac{\text{Cos}^2 x}{\text{Cos } x(1 - \text{Sen } x)}
\end{aligned}$$



$$= \frac{\text{Cos } x}{1 - \text{Sen } x}$$

$$9. \frac{1 + \text{Sen } x}{\text{Sen } x} = 1 + \text{Csc } x$$

$$\begin{aligned} \text{D//} \quad \frac{1 + \text{Sen } x}{\text{Sen } x} &= \frac{1}{\text{Sen } x} + \frac{\text{Sen } x}{\text{Sen } x} \\ &= \text{Csc } x + 1 \end{aligned}$$

$$10. \frac{\text{Sen}^2 x - \text{Tan}^2 x}{\text{Csc } x} = \text{Sen } x$$

$$\begin{aligned} \text{D//} \quad \frac{\text{Sec}^2 x - \text{Tan}^2 x}{\text{Cos } x} &= \frac{\frac{1}{\text{Cos}^2 x} - \frac{\text{Sen}^2 x}{\text{Cos}^2 x}}{\frac{1}{\text{Sen } x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1 - \text{Sen}^2 x}{\text{Cos}^2 x} \\ &= \frac{1}{\text{Sen } x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x}{1} \\
& \quad \frac{1}{\sin x} \\
&= \frac{1}{1} \\
& \quad \frac{1}{\sin x} \\
&= \sin x
\end{aligned}$$

$$11. \frac{\sin x}{\csc x} + \frac{\cos x}{\sec x} = 1$$

$$\begin{aligned}
D// \frac{\sin x}{\csc x} + \frac{\cos x}{\sec x} &= \frac{\sin x}{1} + \frac{\cos x}{1} \\
& \quad \frac{\sin x}{\sin x} \quad \frac{\cos x}{\cos x} \\
&= \sin^2 x + \cos^2 x \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$12. \frac{\cos x}{\csc x + 1} + \frac{\cos x}{\csc x - 1} = 2 \tan x$$

$$D// \frac{\cos x}{\csc x + 1} + \frac{\cos x}{\csc x - 1} = \frac{\cos x}{\frac{1}{\sin x} + 1} + \frac{\cos x}{\frac{1}{\sin x} - 1}$$

$$= \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\cos x}{1 - \sin x}$$

$$= \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin x} + \frac{\sin x \cos x}{1 - \sin x}$$

$$= \frac{\sin x \cos x (1 - \sin x) + \sin x \cos x (1 + \sin x)}{(2 + \sin x)(1 - \sin x)}$$

$$= \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x}$$